

1. 令 \mathbf{P} 为 $\Omega = [0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 令 \mathcal{F}_n 为由集合

$$\left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{(k+1)}{2^n} \right), k = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \right\}$$

生成的 σ -代数. 显然 $\{\mathcal{F}_n\}$ 为一单增的 σ -域流. 现令 f 为 Ω 上的 μ 可积函数, 令 $f_n = \mathbf{E}[f | \mathcal{F}_n]$. 证明如果 I 是 \mathcal{F}_n 中的一个区间, 证明

(1). $f_n(x) = \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy, \quad x \in I;$

(2). 令 $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{(x-r, x+r) \cap [0,1]} |f(y)| dy$, 则

$$\left| \{x \in [0,1] : Mf(x) > \lambda\} \right| \leq \frac{C}{\lambda} \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \forall \lambda > 0.$$

2. 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ 为满足通常条件的概率空间.

(1). 叙述一维 \mathcal{F}_t -布朗运动 $(W_t)_{t \geq 0}$ 的定义;

(2). 证明 W_t 是一个 \mathcal{F}_t -鞅;

(3). 对于任意有界停时 τ , 令 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau, \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$. 证明 B_t 为 \mathcal{G}_t -布朗运动, 且和 \mathcal{G}_0 独立.

3. 设 $f \in L^2([0,1]; R)$. 考虑方程

$$dX_t = f(t)X_t dW_t, \quad X_0 = x \in R, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(1). 试写出上述方程的一个解;

(2). 上述方程的解是唯一的吗?

4. 设 $X_t(x)$ 为从 $x \in (0,1)$ 出发的一维扩散过程, 具有有界扩散系数 $a(x) > 0$ 和有界漂移系数 $b(x)$. 令 τ 为此过程首次逃出 $(0,1)$ 的时刻. 试求概率 $\mathbf{P}(X_\tau(x) = 1)$.

5. 令 W_t 为一维布朗运动. 证明

(1). 对于任意的 $\lambda > 0, X_t = e^{\lambda|W_t|}$ 是一个下鞅;

(2). 证明

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| > x \right) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

(3). 令 $\sigma : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ 关于由 W_t 生成的 σ -域流适应, 且 $1/2 \leq |\sigma| \leq 2$. 定义 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$. 证明存在一个与 σ 无关的常数 c , 使得

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x_s| > x \right) \leq 2e^{-\frac{cx^2}{t}};$$

(4). 令 x_t 为 3. 中给定的随机过程. 证明存在一个正常数 $\mu > 0$, 使得

$$\mathbf{E}e^{\mu\tau} < \infty,$$

其中 $\tau = \inf\{t > 0 : |x_t| < 1\}$.

6. 令 $d \geq 2$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, x \neq 0\}$. 证明不存在 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(z) = 0 & \text{如果 } |z| = 1; \quad u(z) = 1 & \text{如果 } z = 0 \end{cases}$$

7. 令 $C_0([0,1]; \mathbb{R})$ 为满足 $f(0) = 0$ 的所有连续函数全体, 定义 $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f_t|$. 假设 $h \in C_0([0,1]; \mathbb{R})$ 且 $h' \in L^2([0,1]; \mathbb{R})$. 证明

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(\|W - h\| \leq \epsilon)}{\mathbf{P}(\|W\| \leq \epsilon)} = \exp\left(-\int_0^1 |h'(s)|^2 ds\right),$$

这里 W_t 是一维布朗运动.